WYZNACZANIE OGNISKOWEJ SOCZEWKI CIENKIEJ METODĄ GRAFICZNĄ I ANALITYCZNĄ

I. Cel ćwiczenia: wyznaczanie ogniskowej soczewki skupiającej i rozpraszającej, zapoznanie z metodą graficzną i analityczną wyznaczania wielkości fizycznych.

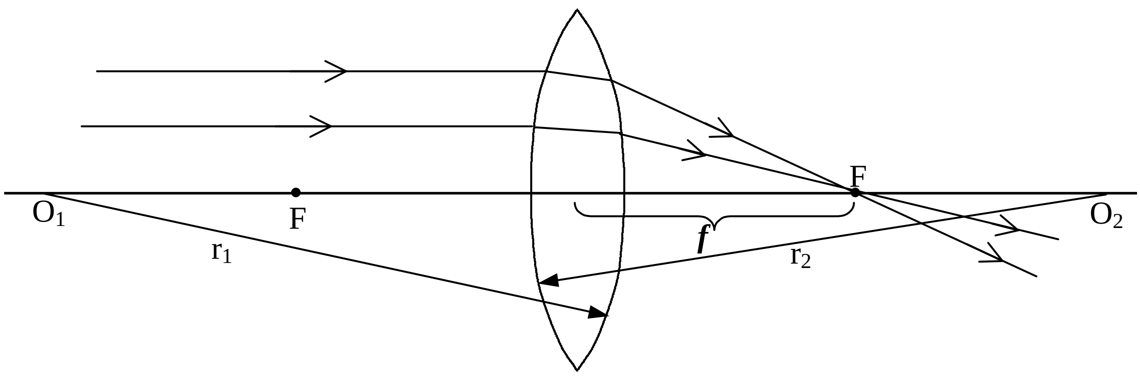
II. Przyrządy: ława optyczna z podziałką milimetrową, przedmiot świecący w postaci strzałki, soczewki, ekran.

III. Literatura: 1. H. Hofmokl, A. Zawadzki, Laboratorium fizyczne.
2. S. Szczeniowski, Fizyka doświadczalna t.IV, Optyka

IV. Wprowadzenie

Soczewką nazywamy ciało przezroczyste ograniczone dwiema powierzchniami zakrzywionymi lub jedną powierzchnią płaską i jedną zakrzywioną. Najczęściej powierzchnie soczewek są powierzchniami kulistymi.

Przyjmując kształt soczewki jako kryterium klasyfikacji, dzielimy je na ***dwuwypukłe, dwuwklęsłe, płaskowklęsłe, płaskowypukłe, płaskowklęsłe, wypukłowklęsłe***. Soczewkę nazywamy ***cienką***, kiedy odległość powierzchni ograniczających ją jest bardzo mała w porównaniu z promieniem krzywizny tych powierzchni. ***Promieniem krzywizny*** nazywamy promień kuli, której wycinkiem jest powierzchnia ograniczająca soczewkę. Środek tej kuli jest ***środkiem krzywizny***. Soczewka posiada dwa środki krzywizny O_1 i O_2. Linię łączącą środki krzywizny nazywamy ***główną osią optyczną*** soczewki. ***Środkiem optycznym*** soczewki nazywamy punkt położony na jej osi optycznej i mający tę własność, że promienie przechodzące przez niego mają ten sam kierunek przed wejściem do soczewki i po wyjściu z niej. Środek optyczny soczewki cienkiej leży w przybliżeniu w środku geometrycznym soczewki. ***Ogniskiem głównym*** nazywamy punkt, w którym soczewka skupia promienie równoległe do głównej osi optycznej biegnące ku niej. Dwa ogniska główne F znajdują się w równych odległościach po obu stronach soczewki.



Rys. 1 Bieg promieni równoległych do głównej osi soczewki, promienie krzywizn r_1 i r_2, środki krzywizn O_1 i O_2, ogniska soczewki F, ogniskowa ***f***

Ogniskową f soczewki nazywamy odległość od ogniska do środka optycznego soczewki. Wierzchołkami soczewki nazywamy punkty przecięcia powierzchni łamiących soczewki z jej osią optyczną. Promienie padające pod niewielkimi kątami (prawie prostopadle) na powierzchnię soczewki w pobliżu soczewki nazywamy ***promieniami przyosiowymi***. Z wyjątkiem promieni biegnących wzdłuż głównej osi optycznej, każdy promień przechodzący przez soczewkę ulega dwukrotnie załamaniu na obu powierzchniach soczewki. Bieg dowolnego promienia możemy wykreślić korzystając z prawa załamania światła. Jeżeli promienie równoległe do głównej osi optycznej po przejściu przez soczewkę odchylają się ku osi, soczewka nosi nazwę skupiającej; jeśli odchylają się od osi, soczewka nosi nazwę rozpraszającej. Gdy względny współczynnik załamania n_{12} jest większy od jedności, to soczewki dwuwypukłe, płaskowypukłe i wklęsłowypukłe (ogólnie te których środek jest grubszy od brzegów) są soczewkami ***skupiającymi***, a soczewki dwuwklęsłe, płaskowklęsłe, wypukłowklęsłe soczewkami ***rozpraszającymi***. Gdy współczynnik n_{12} jest mniejszy od jedności sytuacja jest odwrotna.

Względny współczynnik załamania n_{12} jest to współczynnik załamania materiału 1 soczewki względem otaczającego ją ośrodka 2

$$\boldsymbol{n}_{12} = \frac{\boldsymbol{n}_1}{\boldsymbol{n}_2}$$

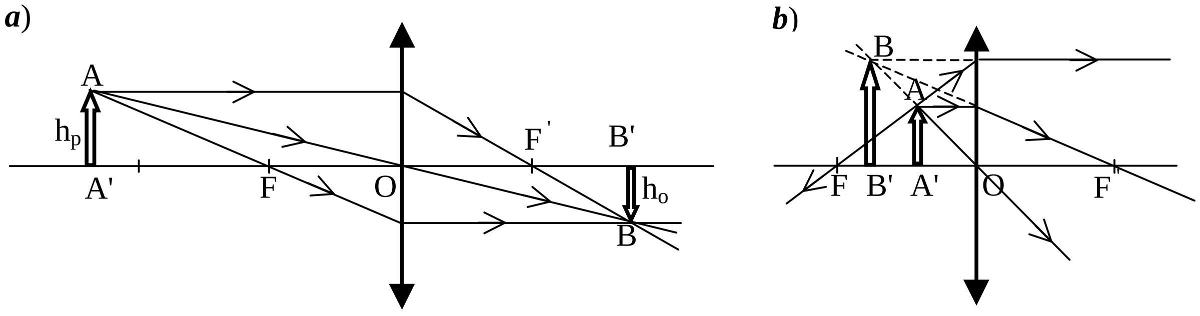
gdzie n_1 - bezwzględny współczynnik załamania materiału soczewki względem próżni, n_2 - bezwzględny współczynnik załamania otaczającego ośrodka względem próżni.

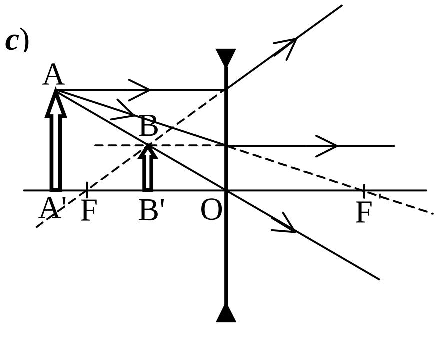
Odległość x przedmiotu od soczewki, odległość y obrazu od soczewki oraz ogniskowa ***f*** są związane równaniem soczewkowym (wyprowadzenie w **Uzupełnieniu**):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \tag{1}$$

Jak już wspomniano wyżej dla soczewek skupiających promienie równoległe do głównej osi optycznej skupiają się po przejściu przez soczewkę w jej ognisku. Soczewka skupiająca wytwarza rzeczywiste obrazy przedmiotów położonych w odległości $x > f$ na głównej osi optycznej i pozorne obrazy przedmiotów położonych w odległości $x < f$.

W soczewce rozpraszającej promienie równoległe do głównej osi optycznej odchylają się po przejściu przez soczewkę tak, że ich przedłużenia przecinają się w ognisku pozornym - punkcie położonym na głównej osi optycznej przed soczewką. Ogniskowej ***f*** soczewki rozpraszającej przypisujemy umowną wartość ujemną, ujemna jest również wartość odległości y obrazu od soczewki. Soczewka rozpraszająca wytwarza obraz pozorny przedmiotów na głównej osi optycznej. Odległość przedmiotu x oraz obrazu y od soczewki spełnia również równanie (1).





Rys. 2 Konstrukcja obrazów w soczewkach: ***a***) soczewka skupiająca, obraz rzeczywisty pomniejszony; ***b***) soczewka skupiająca, obraz pozorny, powiększony; ***c***) soczewka rozpraszająca, obraz pozorny, pomniejszony.

Powiększenie liniowe obrazu definiujemy jako stosunek rozmiarów liniowych obrazu do rozmiarów liniowych przedmiotu

$$M_l = \frac{h_o}{h_p} \qquad (2)$$

Wysokości przedmiotu h_p i obrazu h_o, mierzone prostopadle do osi optycznej są zawsze dodatnie, więc i wartość powiększenia $\boldsymbol{M_l}$ jest zawsze dodatnia (tak dla obrazów prostych jak i dla obrazów odwróconych).
Z podobieństwa trójkątów OAA' i OBB' na rys.2 wynika, że wartość powiększenia $\boldsymbol{M_l}$ obrazów rzeczywistych i pozornych wynosi

$$\frac{h_o}{h_p} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{|y|}{|x|} \quad \Rightarrow \quad M_l = \left|\frac{y}{x}\right| \qquad (3)$$

gdzie $|x|$ jest wartością bezwzględną odległości przedmiotu od soczewki, a $|y|$ wartością bezwzględną odległości obrazu od soczewki (patrz **Umowa znaków** w **Uzupełnieniu**).
Ogniskowa układu optycznego złożonego z dwu soczewek cienkich o ogniskowych f_1 i f_2 wynosi

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l}{f_1 f_2} \qquad (4)$$

gdzie $\boldsymbol{l}$ oznacza odległość wzajemną tych soczewek.
Jeżeli dwie soczewki położone są bardzo blisko siebie, tzn. gdy $l \approx 0$, równanie (4) przyjmie postać

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \qquad (4a)$$

Odwrotność ogniskowej nosi nazwę zdolności skupiającej soczewki i oznaczamy ją przez Φ. Zdolność skupiającą soczewki mierzymy w dioptriach (oznaczamy skrótem D). Wymiarem dioptrii jest m^{-1}. Zdolność skupiająca układu soczewek jest równa sumie zdolności skupiających poszczególnych soczewek układu (z równania (4a)): $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

V. Metoda pomiarów

V. 1 Wyznaczanie ogniskowej soczewki skupiającej

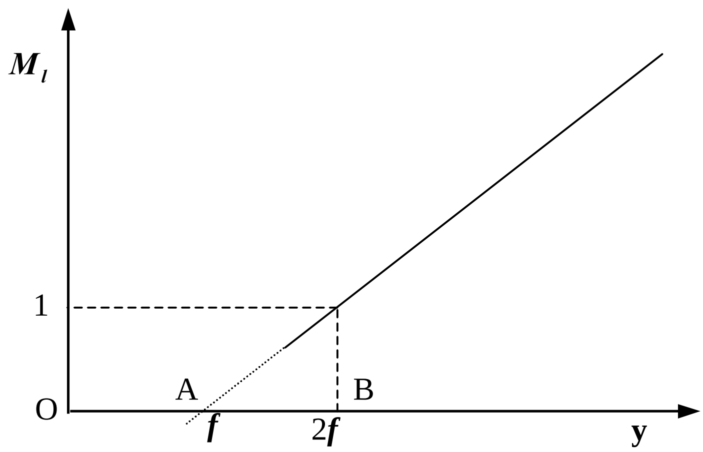
Metoda I - ***Wyznaczanie ogniskowej soczewki skupiającej za pomocą wykresu zależności między powiększeniem a odległością obrazu od soczewki.***

Z równania (1) otrzymujemy

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{f} - 1 \qquad (5)$$

Wstawiając (5) do (3) otrzymamy

$$M_l = \left|\frac{y}{f} - 1\right| \qquad (6)$$



Dla obrazów rzeczywistych i dla $y > f$ (patrz tabela 4 w **Uzupełnieniu**), równanie to przedstawia prostą o nachyleniu $\frac{1}{f}$ przecinającą oś Oy w punkcie $y = f$
Wartość f można wyznaczyć przez ekstrapolację do przecięcia wykresu z osią Oy (odciętych) lub znajdując wartość $2f$ na osi odciętych y dla powiększenia $M_l = 1$: $f = ½OB$

Rys. 3 Wykres zależności wartości powiększenia $\boldsymbol{M_l}$ od odległości y obrazu od soczewki.

Metoda II - ***Wyznaczanie ogniskowej soczewki cienkiej za pomocą wykresu zależności między odległością przedmiotu od obrazu a odległością przedmiotu od soczewki.***

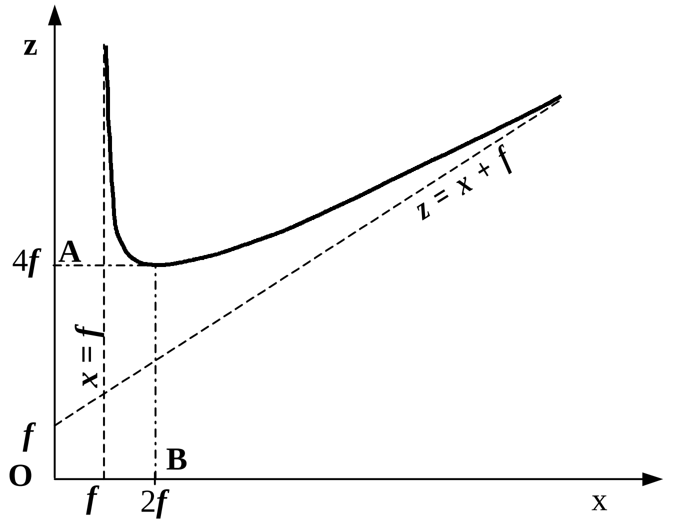
Z równania (1) otrzymamy $y = \dfrac{xf}{x - f}$. Zatem suma $x + y$ jest równa (po przekształceniach)

$$x + y = \frac{x^2}{x - f}$$

Jeśli oznaczymy $x + y = z$ otrzymamy ostatecznie:

$$z = \frac{x^2}{x - f} \qquad (7)$$

Dziedziną funkcji z = f(x) jest zbiór D∈(- ∞; f) ∪ (f; + ∞). Nie rozpatrujemy przypadku x < f, tak więc nie zajmujemy się zbiorem wartości x w przedziale (- ∞; f). Funkcja (7) przedstawia hiperbolę i posiada asymptoty: pionową x = f i ukośną z = x + f. Posiada też minimum w punkcie x = 2f. Wartość funkcji w minimum wynosi z = 4f (więcej na temat przebiegu funkcji z w **Uzupełnieniu** strona 11). Z wykresu na rys 4 znajdujemy f = ½ OB lub f = ¼ OA.



Rys. 4 Wykres odległości z przedmiotu od obrazu w funkcji odległości x przedmiotu od soczewki.

Metoda III - ***Wyznaczanie ogniskowej soczewki cienkiej metodą Bessela***.

Przy stałej odległości przedmiotu od ekranu istnieją położenia soczewki, w których na ekranie pojawiają się wyraźne obrazy. W położeniu pierwszym obraz jest powiększony, w drugim zmniejszony (rys.5).

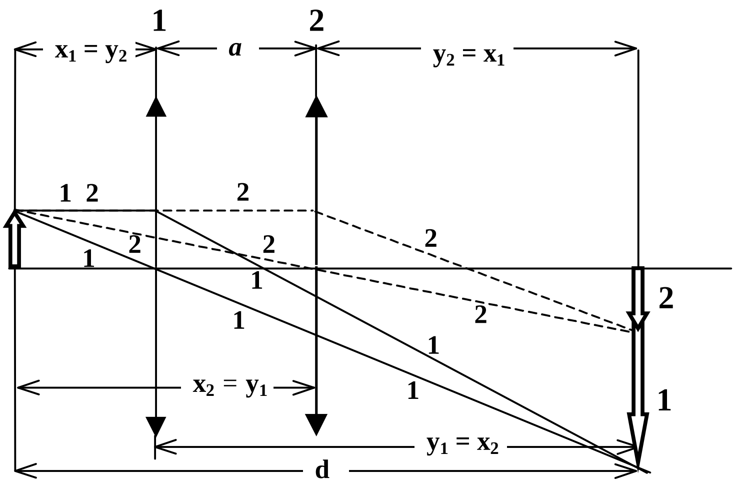
Ponieważ x + y = d oraz y - x = a,

otrzymujemy $x = \dfrac{d - a}{2}$ i $y = \dfrac{d + a}{2}$.

Podstawiając otrzymane wartości do wzoru (1), otrzymamy $f = \dfrac{d^2 - a^2}{4d}$ (8)

lub $4f = d - \dfrac{a^2}{d}$ (9)

Wynika więc z tego, że odległość d musi być większa od 4f.



Rys. 5 Metoda Bessela wyznaczania ogniskowej soczewki cienkiej.

V. 2 Wyznaczanie ogniskowej soczewki rozpraszającej

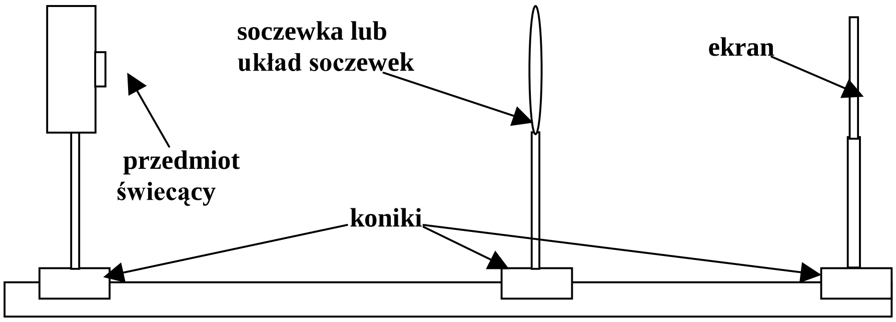
Wykorzystujemy relację podaną wzorem (4) lub (4a). Metodami I, II, III opisanymi wyżej możemy wyznaczyć wyłącznie ogniskową soczewki skupiającej lub zbierającego układu soczewek. Wobec tego, że ogniskowa f_2 soczewki rozpraszającej jest ujemna, musi być spełniony warunek $f_1 < |f_2|$, aby ogniskowa układu była dodatnia (f_1 jest ogniskową soczewki skupiającej, f - ogniskową układu złożonego z soczewki skupiającej i rozpraszającej).

Z równania (4) otrzymujemy: $f_2 = \dfrac{f(f_1 - l)}{f_1 - f}$ (10)

Jeśli $l \approx 0$, wzór (10) przyjmie postać $f_2 = \dfrac{ff_1}{f_1 - f}$ (10a)

VI. Układ pomiarowy

Zestaw do ćwiczenia składa się z przedmiotu świecącego (źródła światła ze szczeliną w postaci strzałki, ekranu, soczewki na statywie, ławy optycznej z podziałką milimetrową. Koniki przedmiotu, soczewki i ekranu posiadają prostopadłe wskaźniki ułatwiające odczyt położenia na ławie optycznej.



Rys. 6 Schemat układu pomiarowego.

VII. Sposób przeprowadzenia pomiarów

Zadanie 1

Wyznaczanie ogniskowej soczewki skupiającej **metodą I**

1. Ustaw na ławie optycznej przedmiot świecący w odległości ok. 100 cm od ekranu (patrz rys.6).
2. Między przedmiotem świecącym i ekranem umieść soczewkę.
3. Ustaw soczewkę tak, aby obraz na ekranie był ostry i pomniejszony. Zanotuj w tabeli pomiarów położenia wskaźników przedmiotu, soczewki i ekranu na podziałce ławy optycznej. Przykład tabeli pomiarów poniżej (l_p - położenie wskaźnika przedmiotu, l_s - położenie wskaźnika soczewki, l_e - położenie wskaźnika ekranu).

Tabela1

Lp	l_p [cm]	l_s [cm]	l_e [cm]	$x = l_s - l_p$ [cm]	$y = l_e - l_s$ [cm]	$M_l = y/x$
1						
2						

4. Przesuń soczewkę o 10 cm w stronę przedmiotu* (jeśli pomiary rozpoczęto od obrazów pomniejszonych) a następnie przesuwając ekran uzyskaj ostry obraz świecącej strzałki. Wyniki zapisz w tabeli (jak w punkcie 3).
5. Zmieniając położenie soczewki powtórz kilkakrotnie punkt 4.

* Można zmieniać położenie przedmiotu przy stałej pozycji soczewki.

Zadanie 2

Wyznaczanie ogniskowej soczewki skupiającej **metodą II**

1. Wyznacz w przybliżeniu ogniskową soczewki przez znalezienie punktu przecięcia promieni równoległych światła słonecznego lub światła odległej żarówki na kartce papieru lub maksymalnie oddalając przedmiot świecący od soczewki poszukaj punktu przecięcia promieni równoległych na ekranie.
2. Ustaw przedmiot za ogniskiem soczewki w odległości bliskiej f, ekran maksymalnie oddalony od soczewki. Jeśli nie jest możliwe uzyskanie na ekranie ostrego obrazu należy nieznacznie zwiększyć odległość między soczewką a przedmiotem.
3. Zanotuj w tabeli pomiarów położenia wskaźników przedmiotu, soczewki i ekranu na podziałce ławy optycznej (l_p, l_s, l_e). Przykład tabeli pomiarów poniżej, oznaczenia jak wyżej.

4. Odsuwaj soczewkę od przedmiotu początkowo co 1 cm (5÷6 punktów pomiarowych), potem co 2 cm (10 punktów pomiarowych) a następnie co 5 cm (6 lub więcej punktów pomiarowych). Przesuwając ekranem, uzyskaj za każdym razem ostry obraz strzałki. **Uwaga:** *Informacje dotyczące ilości punktów pomiarowych dotyczą soczewki o ogniskowej rzędu dwudziestu kilku cm.*

Tabela 2

Lp	$\boldsymbol{l}_s$ [cm]	$\boldsymbol{l}_p$ [cm]	$\boldsymbol{l}_e$ [cm]	$x = \boldsymbol{l}_s - \boldsymbol{l}_p$ [cm]	$z = x + y = \boldsymbol{l}_e - \boldsymbol{l}_p$ [cm]
1					
2					

Zadanie 3

***Wyznaczanie ogniskowej soczewki skupiającej* metodą III (Bessela)**

1. Ustaw przedmiot i ekran w odległości rzędu jednego metra. Wyznacz tę odległość d, odczytując położenia $\boldsymbol{l}_e$ i $\boldsymbol{l}_p$ wskaźników ekranu i soczewki ($d = \boldsymbol{l}_e - \boldsymbol{l}_p$) .
2. Między ekranem i przedmiotem świecącym ustaw soczewkę. Przesuń ją w położenie, w którym obraz na ekranie jest powiększony i najwyraźniejszy. Wyznacz położenie $\boldsymbol{l}_s^{'}$ wskaźnika soczewki na podziałce ławy optycznej kilka razy.
3. Przesuń soczewkę w położenie, w którym otrzymany na ekranie obraz zmniejszony jest najwyraźniejszy. Wyznacz położenie $\boldsymbol{l}_s^{''}$ wskaźnika soczewki na podziałce ławy optycznej kilka razy.
   Wszystkie wyniki zapisz w tabeli pomiarów 3.
4. Pomiary z punktów 2 - 3 wykonaj dla kilku np. pięciu różnych odległości d.

Tabela 3

<table>
<tr><th>Lp</th><th>$\boldsymbol{l}_p$ [cm]</th><th>$\boldsymbol{l}_e$ [cm]</th><th>$\mathbf{d} = \boldsymbol{l}_e - \boldsymbol{l}_p$</th><th>$\boldsymbol{l}_s^{'}$ [cm]</th><th>$\boldsymbol{l}_s^{''}$ [cm]</th><th>$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{l}_s^{''} - \boldsymbol{l}_s^{'}$</th><th>$\overline{\boldsymbol{a}}$</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Zadanie 4

Wyznaczanie ogniskowej soczewki rozpraszającej

1. Dokonaj pomiaru ogniskowej $\boldsymbol{f}_1$ soczewki skupiającej jedną z opisanych metod np. metodą Bessela (pomiary jak w **zadaniu 3**).
2. Ustaw na ławie optycznej układ złożony z soczewki skupiającej o ogniskowej $\boldsymbol{f}_1$ i soczewki rozpraszającej o ogniskowej $\boldsymbol{f}_2$.
3. Wyznacz ogniskową $\boldsymbol{f}$ tego układu soczewek metodą zastosowaną w punkcie 1.

VIII. Opracowanie wyników

Dla **zadania 1**

1. Wyznacz powiększenie liniowe $\boldsymbol{M}_l = \dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}$ dla wszystkich punktów pomiarowych. Wykonaj wykres powiększenia $\boldsymbol{M}_l$ w funkcji odległości y obrazu od soczewki: $\boldsymbol{M}_l = f(y)$. Punkty doświadczalne powinny ułożyć się w przybliżeniu na linii prostej.
2. Ekstrapolując prostą $\boldsymbol{M}_l = f(y)$ aż do przecięcia z osią odciętych, wyznacz punkt A (rys. 3).

3. Odczytaj z wykresu wartość $\boldsymbol{f}$. Ogniskowa jest równa wartości odcinków OA lub ½ OB, gdzie OB - odcięta punktu prostej o rzędnej $\boldsymbol{M_l} = 1$ (patrz rys. 3).
4. Oceń niepewności pomiarowe $\Delta \boldsymbol{l}_s$, $\Delta \boldsymbol{l}_p$, $\Delta \boldsymbol{l}_e$. Zaznacz na wykresie niepewności pomiarowe $\Delta \boldsymbol{M_l}$ i Δy; $\Delta y = \pm\sqrt{\Delta l_s^2 + \Delta l_e^2}$, $\Delta x = \pm\sqrt{\Delta l_s^2 + \Delta l_p^2}$, $\Delta M_l = \pm M_l \cdot \left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right)$. Oceń niepewność $\Delta \boldsymbol{f}$ wyznaczenia ogniskowej soczewki;

Przy wyznaczaniu ogniskowej najlepiej posłużyć się metodą analityczną:

1. Przedstaw zależność powiększenia liniowego $\boldsymbol{M_l}$ w funkcji odległości y obrazu od soczewki. Korzystając z metody najmniejszych kwadratów wyznacz parametry prostej $\boldsymbol{M_l} = \boldsymbol{a}y + \boldsymbol{b}$, gdzie $a = \frac{1}{f}$ i $\boldsymbol{b}$ są parametrami prostej. Prostą o wyznaczonych parametrach narysuj na wykresie.
2. Wyznacz ogniskową soczewki: $f = \frac{1}{a}$.
3. Oblicz niepewność pomiarową ogniskowej $\Delta \boldsymbol{f}$: $\Delta f = \pm f\,\frac{\Delta a}{a}$, gdzie $\Delta \boldsymbol{a}$ - niepewność wyznaczenia parametru $\boldsymbol{a}$ w metodzie najmniejszych kwadratów.

Dla **zadania 2**

1. Wykonaj wykres zależności odległości $\boldsymbol{z}$ przedmiotu od jego obrazu w funkcji odległości x przedmiotu od soczewki: $\boldsymbol{z}$ = f(x), gdzie $\boldsymbol{z}$ = x + y .
2. Zaznacz na wykresie asymptotę pionową i ukośną.
3. Wyznacz z wykresu ogniskową $\boldsymbol{f}$ soczewki.
4. Wyznacz niepewności pomiarowe Δx i $\Delta \boldsymbol{z}$.
   Niepewności pomiarowe Δx i $\Delta \boldsymbol{z}$ związane są z niepewnościami położenia Δl_p, Δl_s, Δl_e, które należy ocenić; $\Delta x = \pm\sqrt{(\Delta l_s)^2 + (\Delta l_p)^2}$ oraz $\Delta z = \pm\sqrt{(\Delta l_e)^2 + (\Delta l_p)^2}$
   Zaznacz niepewności Δx i $\Delta \boldsymbol{z}$ na wykresie (jeśli pozwala na to przyjęta skala wykresu).
5. Oszacuj niepewność $\Delta \boldsymbol{f}$ korzystając z zaznaczonych na wykresie niepewności Δx i $\Delta \boldsymbol{z}$.

Wykorzystując metodę analityczną:

1. Przekształć wzór (7) do postaci $\boldsymbol{Z}$ = x - f, gdzie $Z = \frac{x^2}{z}$. Wyznacz metodą najmniejszych kwadratów parametry $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{f}$ prostej $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{a}$x + $\boldsymbol{b}$.
2. Korzystając z obliczonego parametru $\boldsymbol{b}$ wyznacz ogniskową soczewki $\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{b}$.
3. Oblicz niepewność pomiarową $\Delta \boldsymbol{f}$: $\Delta f = \pm f\,\frac{\Delta b}{b}$, gdzie $\Delta \boldsymbol{b}$ jest niepewnością wyznaczenia parametru $\boldsymbol{b}$ prostej.

Dla **zadania 3**

1. Oblicz odległości $\boldsymbol{d}$ przedmiotu od ekranu oraz średnie przesunięcie $\bar{a}$ soczewki dla danej odległości $\boldsymbol{d}$.
2. Oblicz wartość ogniskowej $\boldsymbol{f}$ ze wzoru (8) dla każdej serii pomiarowej. Przy pięciu seriach, tj. gdy n = 5, będzie to 5 wartości.
3. Oblicz wartość średnią $\bar{f}$.
4. Oblicz niepewność $\Delta \boldsymbol{f}$ korzystając z relacji $\Delta \boldsymbol{f}$ = $S_{\bar{f}} \cdot t(\alpha, k)$, gdzie $S_{\bar{f}}$ - średni błąd kwadratowy średniej ogniskowej (wzór poniżej), $\boldsymbol{t(\alpha,k)}$ - współczynnik rozkładu Studenta-Fishera (szukaj w tablicach tego rozkładu np. w *Uzupełnieniu „I pracownia fizyczna” J Kacperski , K Niedźwiedziuk*), k - ilość stopni swobody, k = n - 1, α - współczynnik ufności (przyjąć α = 0,95).

$$S_{\bar{f}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_i - \bar{f}\right)^2}{n(n-1)}}$$

(patrz *„ Rachunek błędu ” podręcznik „I pracownia fizyczna” J Kacperski , K Niedźwiedziuk*).

Dla **zadania 4**

1. Oblicz ogniskową f_1 soczewki skupiającej oraz ogniskową f układu soczewek tak jak opisano to dla **zadania 3**.
2. Oblicz korzystając ze wzoru (10) lub (10a) wartość ogniskowej f_2 soczewki rozpraszającej.
3. Oblicz Δf **,** Δf_1 (jak dla **zadania 3**) oraz $\Delta f_2 = \pm f_2^2 \sqrt{\left(\frac{\Delta f_1}{f_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f}{f^2}\right)^2}$.

UWAGA: Należy uzgodnić z prowadzącym zajęcia laboratoryjne, które z przedstawionych zadań (1 ÷ 4) należy wykonać.

UZUPEŁNIENIE

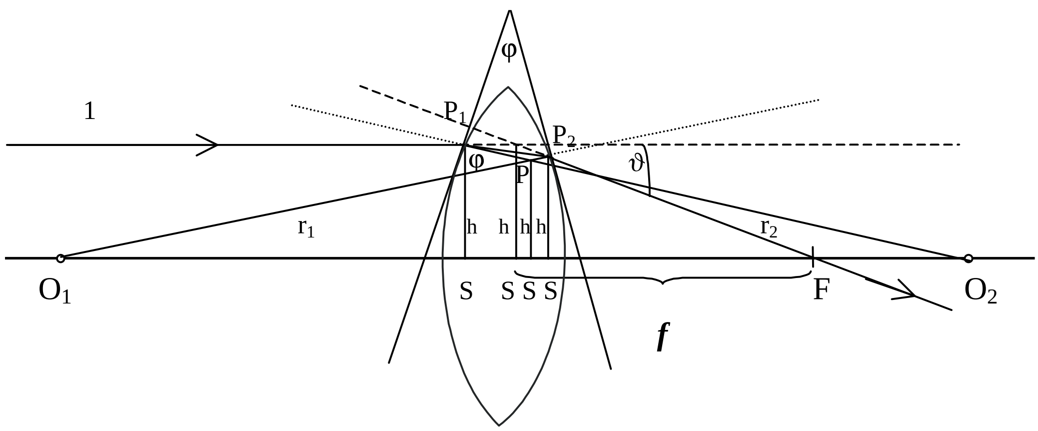
Niech P_1 i P_2 będą punktami, w których pewien wybrany promień 1 przecina obie powierzchnie soczewki (rys.7). Punkty O_1 i O_2 są środkami krzywizn powierzchni soczewki, punkt P jest punktem przecięcia się odcinków O_1P_2 i O_2P_1. Kąt odchylenia promienia jest równy kątowi o jaki odchyliłby się promień 1, gdyby soczewkę zastąpić pryzmatem, którego powierzchnie byłyby styczne do powierzchni soczewki w punktach P_1 i P_2 .Kąt łamiący φ takiego pryzmatu zależy od położenia punktów P_1 i P_2. Dla soczewki cienkiej i promieni przyosiowych punkty P_1, P_2 i P są praktycznie równoodległe od głównej osi optycznej . Kąt φ jest równy kątowi zewnętrznemu trójkąta O_1O_2 P i wynosi:

$$\varphi = \angle PO_1O_2 + \angle PO_2O_1$$

Odległość punktu P od głównej osi optycznej jest równa h tak więc mamy :

$$\sin(\angle PO_1O_2) = \frac{h}{r_1}$$

$$\sin(\angle PO_2O_1) = \frac{h}{r_2}$$



Rys.7 Bieg promienia 1 równoległego do osi optycznej w soczewce i po przejściu przez nią.

Dla soczewki cienkiej i promieni przyosiowych kąty PO_1O_2 i PO_2O_1 są bardzo małe. W takim razie: $\sin(\angle PO_1O_2) \approx \angle PO_1O_2$ i $\sin(\angle PO_2O_1) \approx \angle PO_2O_1$. Otrzymujemy ostatecznie wzór na kąt łamiący pryzmatu zastępczego dla promienia padającego na soczewkę w punkcie odległym o h od głównej osi optycznej:

$$\varphi = \frac{h}{r_1} + \frac{h}{r_2} \tag{11}$$

Ten sam wzór obowiązuje dla soczewki płaskowypukłej i wklęsłowypukłej. Dla promieni przechodzących przez środek soczewki h = 0, a więc kąt φ jest równy zero. Promienie te przechodzą przez soczewkę bez załamania, tak jak przez cienką płytkę płaskorównoległą.

Umowa znaków

a). Wszystkie odległości mierzymy od (lub do) wierzchołka powierzchni łamiącej soczewki. Dla soczewek cienkich odległości mierzone od powierzchni ograniczających soczewkę możemy utożsamiać z odległościami od środka optycznego soczewki, ponieważ odległości te są w przybliżeniu równe.

b). Odległości mierzone wzdłuż biegu promieni rzeczywistych są oznaczone znakiem (+). Odległości mierzone wzdłuż przedłużeń promieni rzeczywistych (tzn. wzdłuż promieni pozornych) oznacza się znakiem (-).

c). Promień krzywizny danej powierzchni ograniczającej soczewkę jest dodatni, jeżeli powierzchnia ta jest wypukła na zewnątrz; ujemny, jeśli ta powierzchnia jest wklęsła na zewnątrz.

Wzór na ogniskową *f* soczewki

Kąt odchylenia ϑ promienia padającego na soczewkę w odległości h od środka soczewki ze wzoru (11) i wzoru na kąt odchylenia promieni w pryzmacie jest równy:

$$\vartheta = (\boldsymbol{n}_{12} - 1)\varphi = (\boldsymbol{n}_{12} - 1)\left[\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{r}_1} + \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{r}_2}\right] \qquad (12)$$

gdzie $\boldsymbol{n}_{12}$ jest to względny współczynnik załamania materiału 1 soczewki względem otaczającego ją ośrodka 2: $\boldsymbol{n}_{12} = \dfrac{\boldsymbol{n}_1}{\boldsymbol{n}_2}$.

Bezwzględny współczynnik załamania materiału soczewki względem próżni jest równy $n_1 = c/v_1$, bezwzględny współczynnik załamania otaczającego ośrodka względem próżni równa się $n_2 = c/v_2$ (c - prędkość światła w próżni, v_1 - prędkość światła w materiale soczewki, v_2 - prędkość światła w otaczającym soczewkę środowisku).

Z drugiej strony, kąt ten można powiązać z odległością, w jakiej promień równoległy do głównej osi optycznej przecina tę oś po przejściu przez soczewkę

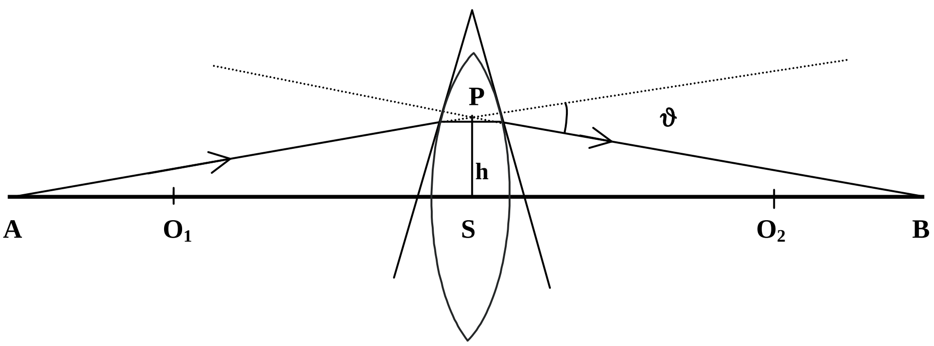
$$\vartheta \approx \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{f}} \qquad (13)$$

Korzystając, że mamy do czynienia z małymi kątami dla których $\vartheta \approx \sin\vartheta \approx \operatorname{tg}\vartheta$ i porównując wzory (12) i (13) otrzymujemy zależność

$$\frac{1}{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{n}_{12} - 1)\left[\frac{1}{\boldsymbol{r}_1} + \frac{1}{\boldsymbol{r}_2}\right] \qquad (14)$$

We wzorze tym nie występuje w ogóle odległość h promienia od głównej osi optycznej, a więc wszystkie równoległe do osi optycznej promienie przyosiowe przecinają oś optyczną w tej samej odległości ***f***.

Równanie soczewki.



Rys. 8 Powstawanie obrazu punktu świecącego

Kąt odchylenia ϑ promienia wysłanego przez punkt A, położony na osi optycznej, jako kąt zewnętrzny trójkąta APB, równy jest

$$\vartheta = \angle\, PAB + \angle\, PBA$$

Kąty PAB i PBA możemy przybliżyć przez ich tangensy; otrzymujemy wtedy

$$\vartheta = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{x}} + \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{y}}$$

Porównując ten wzór ze wzorem (13) otrzymujemy tzw. równanie soczewkowe

$$\frac{1}{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{\boldsymbol{f}} \qquad (15)$$

We wzorze tym nie występuje h. Dowodzi to, że wszystkie promienie przyosiowe rozchodzące się z punktu A po przejściu przez soczewkę przetną oś optyczną w tym samym punkcie B, a więc że punkt B jest rzeczywistym obrazem punktu A.
W tabeli 4 i 5 zestawiono własności obrazów otrzymywanych w soczewkach skupiającej i rozpraszającej .

Tabela 4

x	y	M_l	Soczewki skupiające
$x = \infty$	$y = f$	$M_l = 0$	Wiązka promieni równoległych do osi optycznej soczewki skupia się w ognisku .
$x > 2f$	$f < y < 2f$	$M_l < 1$	Obraz rzeczywisty, zmniejszony, odwrócony
$x = 2f$	$y = 2f$	$M_l = 1$	Obraz rzeczywisty, wielkości przedmiotu, odwrócony
$f < x < 2f$	$y > 2f$	$M_l > 1$	Obraz rzeczywisty, powiększony, odwrócony
$x = f$	$y = \infty$	$M_l = \infty$	Promienie wychodzące z ogniska po przejściu przez soczewkę są równoległe
$0 < x < f$	$y < 0$	$M_l > 1$	Obraz, pozorny, powiększony, prosty
$x < 0$	$0 < y < f$	$M_l < 1$	Obraz rzeczywisty przedmiotu pozornego, zmniejszony prosty

Tabela 5

x	y	M_l	Soczewki rozpraszające
$x > 0$	$-f < y < 0$	$M_l < 1$	Obraz pozorny przedmiotu rzeczywistego, zmniejszony prosty
$-f < x < 0$	$y > 0$	$M_l > 1$	Obraz rzeczywisty przedmiotu pozornego, powiększony prosty
$x = -f$	$y = \infty$	$M_l = \infty$	Wiązka promieni zbieżnych do ogniska po przejściu przez soczewkę staje się równoległa
$-2f < x < -f$	$y < -2f$	$M_l > 1$	Obraz pozorny przedmiotu pozornego, powiększony, odwrócony
$x = -2f$	$y = -2f$	$M_l = 1$	Obraz pozorny przedmiotu pozornego, odwrócony, wielkości przedmiotu pozornego
$x < -2f$	$-2f < y < -f$	$M_l < 1$	Obraz pozorny przedmiotu, zmniejszony, odwrócony
$x = \infty$	$y = -f$	$M_l = 0$	Wiązka promieni równoległych staje się rozbieżna po przejściu przez soczewkę

Przebieg zmienności funkcji $z = \dfrac{x^2}{x-f}$**, gdzie** $z = x + y$ (16)

Dziedziną funkcji $z = f(x)$ (**rys 9**) jest zbiór $D \in (-\infty\, ; f) \cup (f\, ; +\infty)$. Nie rozpatrujemy przypadku $x < f$ tak, więc nie zajmujemy się zbiorem wartości x w przedziale $(-\infty\, ; f)$.

$$\lim_{x\to f^+} f(x) = \lim_{x\to f^+} \frac{x^2}{x-f} = +\infty$$

Stąd wynika, że prosta $x = f$ jest asymptotą pionową wykresu danej funkcji f(x).
Ponadto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x-f)x} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2}{x-f} - x\right] = f$$

Tak więc prosta $z = x + f$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji.
Funkcja (16) jest równaniem hiperboli i posiada asymptoty $x = f$ i $z = x + f$ (patrz **rys 9**).

Ekstremum funkcji (16) znajduje się w punkcie, w którym jej pierwsza pochodna przybiera wartość zero

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2x(x-f)-x^2}{(x-f)^2}=\frac{x(x-2f)}{(x-f)^2}=0$$

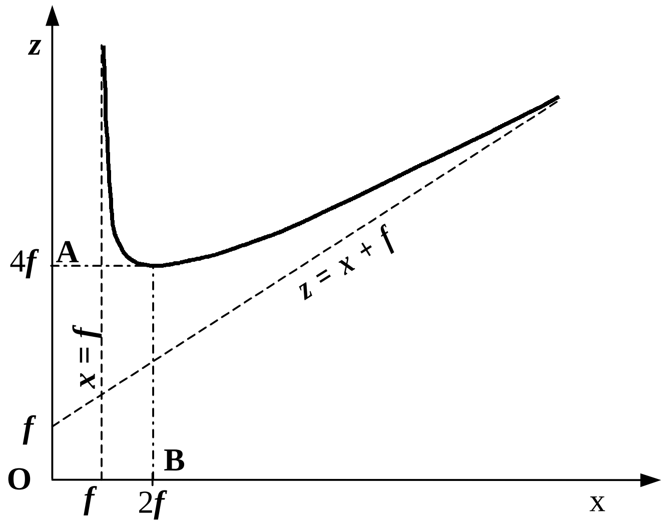
Przy x ≠ 0 i x - ***f*** ≠ 0 zachodzi to dla x – 2***f*** = 0, stąd x = 2***f***.

Ponieważ ***z'*** > 0 dla x ∈ (2***f*** ; +∞) i ***z'*** < 0 dla x ∈(***f*** ; 2***f***), więc dana funkcja jest malejąca w przedziale (***f*** ; 2***f***) , rosnąca w przedziale (2***f*** , +∞)

Z powyższego rozumowania wynika, że funkcja (16) ma minimum w punkcie x = 2***f***. Z równania (15) wynika, że gdy x = 2***f***, to również y = 2***f***, więc

x + y = 4***f***

Z wykresu znajdujemy $f=\frac{1}{2}OB$ lub $f=\frac{1}{4}OA$.



Rys. 9 Wykres funkcji $z=\frac{x^2}{x-f}$