Badanie układów RL i RC

I. Cel ćwiczenia wyznaczenie parametrów układów RL i RC tj. oporu omowego R, pojemności C, indukcyjności L a także zależności impedancji Z i różnicy faz φ od częstości kątowej ω.

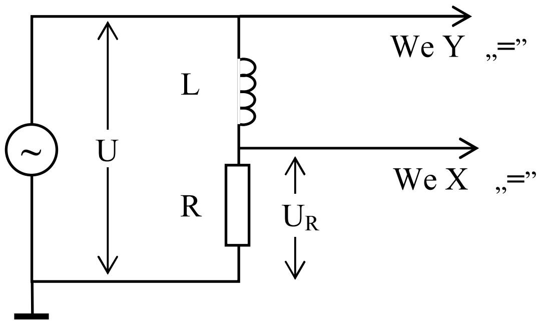
II. Przyrządy opornik, indukcyjność i pojemność dekadowe, oscyloskop , generator.

III. Literatura

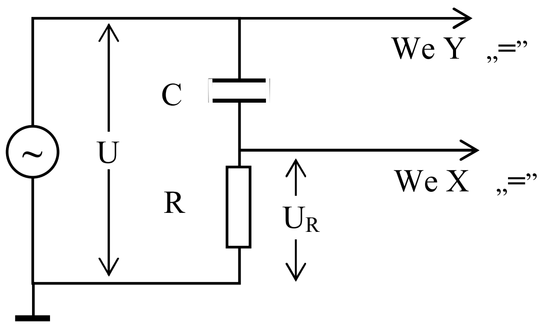
1. E. M. Purcell, Elektryczność i magnetyzm, rozdział 8.1, 8.2,
2. J. Rydzewski, Oscyloskop elektroniczny, rozdz. 5.1, WKiŁ, W-wa, 1986,
3. J. Głowacki, Instrukcja pracowniana E-20A, str. 8, Przypis 1. Pomiar kąta przesunięcia fazowego.

IV. Wprowadzenie

Standardowa metoda badania układów RL i RC polega na wyznaczeniu zależności różnicy potencjałów (napięcia) U(t), mierzonej pomiędzy skrajnymi punktami układu od natężenia prądu I(t) płynącego w obwodzie. Metoda ta wymaga zastosowania generatora jako źródła siły elektromotorycznej (SEM), sinusoidalnie zmiennej w czasie i oscyloskopu jako miernika napięcia i czasu, przy czym oscyloskop może być zastąpiony przez odpowiedni interfejs pomiarowy sprzężony z komputerem.



Rys.1 Układ RL



Rys.2 Układ RC

Jeżeli napięcie przyłożone do badanego układu zapiszemy w formie $U(t) = U_o\sin(\omega t)$ to natężenie prądu najdogodniej jest przedstawić jako $I(t) = I_o\sin(\omega t + \varphi)$, gdzie φ nazywamy fazą natężenia prądu względem napięcia albo krócej – różnicą faz prądu i napięcia.

Stosunek amplitudy napięcia U_o do amplitudy natężenia prądu I_o nazywamy modułem impedancji (modułem oporności zespolonej – stosowane w szkole średniej określenie „zawada" jest w chwili obecnej archaizmem)

$$Z = \frac{U_o}{I_o}$$

Moduł impedancji i różnica faz stanowią podstawowe parametry charakteryzujące układ elementów w obwodzie prądu zmiennego, opisywane ćwiczenie polega na wyznaczeniu zależności modułu impedancji i różnicy faz od częstości, a następnie obliczeniu wartości oporu rzeczywistego R, indukcyjności L lub pojemności C.
Wielkość

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

nazywamy częstością kątową (mniej logiczną nazwą jest częstość kołowa), f – częstością (częstotliwością), a T jest okresem napięcia i prądu.
Moduł impedancji Z_{RL} szeregowego układu RL jest dany wzorem

$$Z_{RL} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

a różnica faz

$$tg\varphi = -\frac{\omega L}{R}$$

Dla szeregowego układu RC odpowiednie wzory mają postać

$$Z_{RC} = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}$$

$$tg\varphi = \frac{1}{\omega RC}$$

Wyrażenia $R_L = \omega L$ i $R_C = 1/\omega C$ zwane często oporem indukcyjnym i pojemnościowym opisują odpowiednio moduł impedancji idealnego uzwojenia (nadprzewodzącego tj. pozbawionego oporu elektrycznego) i idealnego kondensatora. Oznacza to, iż amplitudy napięcia na uzwojeniu i kondensatorze możemy zapisać w postaci

$$U_{oL}(t) = \omega L I_o$$

$$U_{oC} = \frac{1}{\omega C} I_o$$

gdzie I_o jest amplitudą natężenia prądu.
Uzwojenie nawinięte zwykłym przewodnikiem tym się różni od idealnego, iż moduł jego impedancji Z_L wyrażony jest wzorem

$$Z_L = \sqrt{R_u + (\omega L)^2}$$

gdzie R_u jest oporem elektrycznym przewodnika. A zatem dla rzeczywistego układu RL mamy

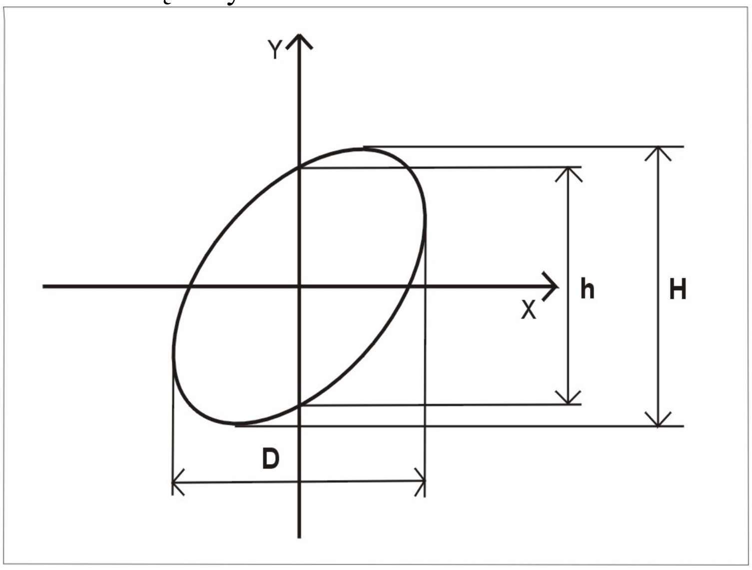
$$Z_{RL} = \sqrt{(R + R_u)^2 + (\omega L)^2}$$

Wielkość $R + R_u$ nazywamy całkowitym oporem rzeczywistym układu RL.

Napięcie na nadprzewodzącym uzwojeniu o stałej indukcyjności L (współczynniku indukcji własnej, współczynniku samoindukcji) jest wprost proporcjonalne do szybkości zmian natężenia prądu w czasie $U_L(t) = L\frac{dI(t)}{dt}$ - wzór ten traktować można jako definicję indukcyjności. Analogiczny wzór dla kondensatora o pojemności C ma postać $U_C(t) = \frac{1}{C}Q(t)$, $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$, gdzie Q jest ładunkiem zgromadzonym w kondensatorze.

V.1 Metoda pomiaru modułu impedancji i różnicy faz

Aby wyznaczyć wartość modułu impedancji badanego układu należy zmierzyć amplitudę napięcia na układzie U_o i amplitudę natężenia prądu w obwodzie I_o. Oscyloskop jest miernikiem napięcia – nie możemy nim wprawdzie bezpośrednio mierzyć natężenia prądu, ale możemy w tym celu wykorzystać prawo Ohma. Jeśli przez opornik o oporze R płynie prąd o natężeniu $I(t) = I_o\sin(\omega t + \varphi)$ to napięcie na oporniku jest równe $U_R(t) = RI(t) = RI_o\sin(\omega t + \varphi)$. Jak stąd wynika amplituda natężenia prądu jest wprost proporcjonalna do amplitudy napięcia na oporniku $\boldsymbol{I_o = \frac{1}{R}U_{oR}}$, współczynnikiem proporcjonalności jest odwrotność oporu R, a fazy napięcia i natężenia prądu są takie same. Schemat układu pomiarowego przedstawiony jest na rys.1 i 2. Szeregowy układ RL (RC) zasilany jest z generatora, napięcie U, występujące między punktami skrajnymi układu przykładane jest do wejścia Y oscyloskopu, a napięcie U_R między końcami opornika R podawane jest na wejście X. W tej sytuacji wiązka elektronów w lampie oscyloskopu odchylana jest w pionie napięciem $U(t) = U_o\sin(\omega t)$, a w poziomie napięciem $U_R(t) = U_{oR}\sin(\omega t + \varphi)$ i w efekcie tego na ekranie lampy powstaje obraz elipsy, którego parametry zdefiniowane są na rys.3.



Rys.3 Parametry obrazu elipsy obserwowanego na ekranie oscyloskopu dla $0<\varphi<\pi/2$.

Podstawową właściwością oscyloskopu jest to, iż odchylenie wiązki elektronów od pierwotnego kierunku, mierzone w płaszczyźnie ekranu, a spowodowane przyłożeniem do odpowiedniego wejścia pomiarowego (wejścia X, Y) mierzonego napięcia jest wprost proporcjonalne do wartości tego napięcia. Jak stąd wynika – wysokość H musi być wprost proporcjonalna do podwojonej amplitudy napięcia na połączonych szeregowo oporniku i cewce lub oporniku i kondensatorze. Podobnie szerokość D obrazu elipsy musi być wprost proporcjonalna do podwojonej amplitudy napięcia na oporniku. Pomiar napięcia oscyloskopem sprowadza się do zmierzenia długości odpowiedniego odcinka na ekranie i pomnożenia go przez wartość tzw. współczynnika odchylania, wyrażonego w jednostkach napięcia na centymetr (działkę skali ekranu). Współczynnik odchylania mówi nam, jakie napięcie musimy podać na dane wejście pomiarowe oscyloskopu, aby wiązka elektronów odchyliła się o 1 cm.

Moduł impedancji obliczamy za pomocą wzoru

$$\boldsymbol{Z = \frac{U_o}{I_o} = \frac{2U_o}{2I_o} = \frac{2U_o}{\frac{2U_{oR}}{R}} = \frac{Hs_y}{Ds_x}R}$$

gdzie s_x i s_y są odpowiednio współczynnikami odchylania pionowego (Y) i odchylania poziomego (X). Amplitudę natężenia prądu obliczamy z

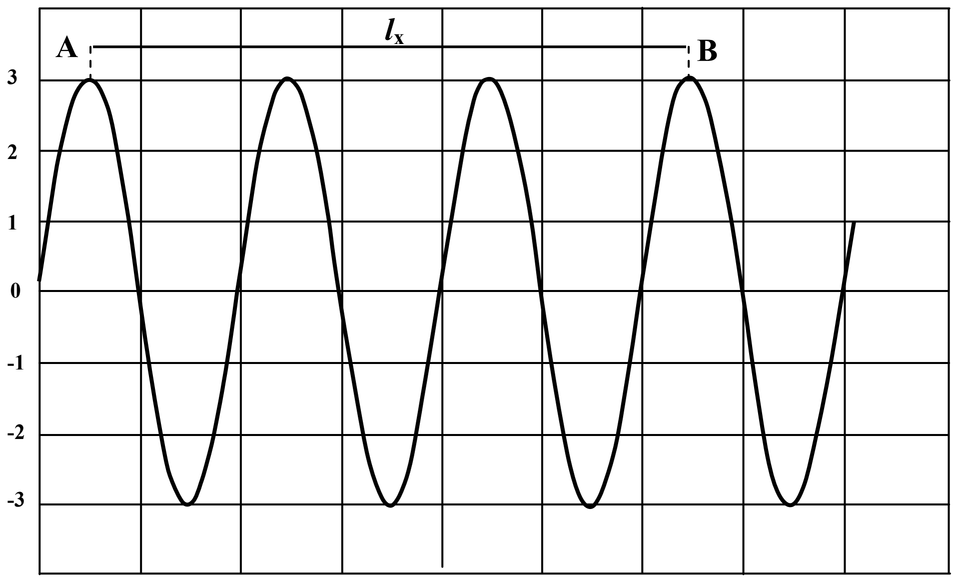
$$I_o = \frac{U_{oR}}{R} = \frac{Ds_x}{2R}$$

a moduł różnicy faz natężenia prądu i napięcia z

$$\sin|\varphi| = \frac{h}{H}.$$

V.2 Metoda pomiaru częstości

Oscyloskopem mierzymy częstość metodą pośrednią poprzez pomiar okresu badanego napięcia. Oscyloskop może pracować w dwu podstawowych trybach: XY, poprzednio omówiony i YT, czyli z liniową podstawą czasu. W tym ostatnim przypadku badane napięcie przykładane jest do wejścia Y (wejścia toru odchylania pionowego wiązki elektronów), natomiast do układu odchylania poziomego (X) przykładane jest liniowo narastające w czasie napięcie, wytwarzane przez wewnętrzny generator, a nazywane napięciem podstawy czasu. Napięcie podstawy czasu przesuwa, w płaszczyźnie ekranu, wiązkę elektronów ruchem jednostajnym od lewej do prawej krawędzi ekranu. W efekcie na ekranie może powstać obraz będący liniowym odwzorowaniem wykresu zależności badanego napięcia od czasu o skali określonej współczynnikiem odchylania pionowego (s_y) i współczynnikiem czas/centymetr (s_t), zależnym od szybkości narastania napięcia podstawy czasu, a informującym użytkownika oscyloskopu o czasie, w jakim wiązka elektronów przesuwa się poziomo o 1cm w płaszczyźnie ekranu.



Rys.4 Obraz przebiegu sinusoidalnego na ekranie oscyloskopu.

Przypuśćmy, iż otrzymaliśmy na ekranie obraz sinusoidy (rys.4). Odcinek AB o długości l_x mierzonej w jednostkach ekranu (centymetrach) odpowiada n = 3 okresom T badanego napięcia. W takiej sytuacji okres T obliczamy ze wzoru $T = \frac{l_x s_t}{n}$, a częstość z $f = \frac{1}{T}$.

VI. Pomiary

Przygotować oscyloskop do pomiarów według wskazówek prowadzącego zajęcia, a następnie połączyć przyrządy w sposób wynikający ze schematu, przedstawionego na rys.1 lub rys.2. Po sprawdzeniu obwodu i ustabilizowaniu się pracy generatora wykonać pierwszy pomiar według następującej procedury:

1. Tak dobrać współczynniki odchylania s_y i s_x, aby obraz elipsy wypełnił maksymalnie ekran. Sprawdzić, czy pokrętła ciągłej regulacji współczynników odchylania znajdują się w tak zwanych położeniach kalibrowanych. Odczytać z ekranu i zanotować wartości parametrów obrazu elipsy H, h i D, zanotować wartości s_x i s_y.
2. Przełączyć oscyloskop na pracę z liniową podstawą czasu, sprawdzić czy pokrętło ciągłej regulacji współczynnika czas/cm (s_t) znajduje się w położeniu kalibrowanym. Dobrać tak wartość tego współczynnika, aby na ekranie widoczny był wycinek sinusoidy odpowiadający kilku okresom. Odczytać i zanotować wartości n, l_x i s_t według wskazówek podanych poprzednio.

Powtórzyć pomiary w opisany powyżej sposób dla innych wartości częstości (co najmniej sześciu) dobierając je tak, aby przy przejściu do następnej wartości częstości napięcie na oporniku i różnica faz zmieniały się istotnie.

VII. Sposób wyznaczania parametrów badanego układu

Najdogodniejszym sposobem wyznaczenia parametrów układu jest zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do aproksymacji zależności modułu impedancji od częstości kątowej ω funkcją daną prze teorię: $Z_{RL}(\omega) = \sqrt{(R)^2 + (\omega L)^2}$. Trafiamy tu jednak na pewien problem natury obliczeniowej – funkcja ta jest funkcją nieliniową, natomiast ze wszystkich metod, zwanych ogólnie metodą najmniejszych kwadratów, najprostszą jest metoda regresji liniowej. A zatem należałoby dokonać tzw. linearyzacji funkcji $Z_{RL}(\omega)$ czyli sprowadzenia jej poprzez odpowiednie przekształcenia i podstawienia do funkcji liniowej typu $y = a + bx.$ W przypadku układu RL wystarczy zwykłe podniesienie stronami do kwadratu $Z_{RL}^2 = R^2 + \omega^2 L^2$ i podstawienie $y = Z_{RL}^2$, $x = \omega^2$ .Wówczas $a = R^2$ i $b = L^2$.

Reasumując:
1. W oparciu o wyniki bezpośrednich pomiarów obliczamy wartości modułu impedancji Z_{RL} i częstości kątowej ω
2. Obliczamy wartości nowych zmiennych fizycznych $y = Z_{RL}^2$ i $x = \omega^2$
3. Do punktów doświadczalnych (x, y) dopasowujemy prostą $y = a + bx$ metodą najmniejszych kwadratów (regresji liniowej)
4. Obliczamy wartość indukcyjności $L = \sqrt{b}$ i całkowitego oporu rzeczywistego układu $R = \sqrt{a}$.

Dla układu RC odpowiednie wzory przyjmują postać: $Z_{RC} = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

$Z_{RC}^2 = R^2 + \frac{T^2}{4\pi^2 C^2}$, $y = Z_{RC}^2$, $x = T^2$, $a = R^2$, $b = \frac{1}{4\pi^2 C^2}$, $R = \sqrt{a}$, $C = \frac{1}{2\pi\sqrt{b}}$.

Znając wartości parametrów układu możemy sprawdzić, czy otrzymana zależność modułu kąta φ różnicy faz natężenia prądu i napięcia jest, w granicach dokładności pomiarów, zgodna z modelem matematycznym zjawisk zachodzących w obwodzie. Odpowiednie wzory teoretyczne mają postać $tg\varphi = -\frac{\omega L}{R}$ i $tg\varphi = \frac{1}{\omega RC}$. Podstawiając $y = tg|\varphi|$, $x = \omega$ lub $x = \frac{1}{T}$ otrzymujemy równanie prostej $y = bx$, gdzie $b = \frac{L}{R}$ lub $b = \frac{1}{2\pi RC}$. Dopasowując do zbioru punktów doświadczalnych (x, y) funkcję liniową $y = a + bx$ (metodą najmniejszych kwadratów) otrzymujemy wartości wyrażeń L/R i RC, które to wartości porównujemy z wartościami uzyskanymi z zależności opisanych powyżej.

VIII. Ocena dokładności pomiarów wykonywanych oscyloskopem

Na dokładność wyznaczenia modułu impedancji mają wpływ trzy czynniki:

1. Dokładność odczytu długości odpowiedniego odcinka na ekranie oscyloskopu – jest ona rzędu $\Delta H = \Delta h = \Delta D = \Delta l_x = \pm 2mm$
2. Dokładność skalowania oscyloskopu w postaci maksymalnej niepewności względnej współczynnika odchylania $\frac{\Delta s_y}{s_y} = \frac{\Delta s_x}{s_x} = \frac{\Delta s_t}{s_t} = 0.03$
3. Dokładność skalowania opornika wzorcowego R w postaci maksymalnej niepewności względnej jego oporu elektrycznego $\frac{\Delta R}{R}$

Ostatecznie maksymalna niepewność względna wartości modułu impedancji Z dana jest przez

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta s_y}{s_y} + \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta s_x}{s_x} + \frac{\Delta R}{R}$$

Niepewność pomiaru okresu T obliczamy analogicznie

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta l_x}{l_x} + \frac{\Delta s_x}{s_x}$$

Maksymalna niepewność względna różnicy faz φ wynosi

$$\frac{\Delta \varphi}{\varphi} = \frac{\Delta h}{H\sqrt{1-(\frac{h}{H})^2}} + \frac{h\Delta H}{H^2\sqrt{1-(\frac{h}{H})^2}}$$

IX. Zalecana forma sprawozdania z wykonanych pomiarów

1. Wykreślić zależności modułu impedancji Z i różnicy faz φ od częstości kątowej ω z uwzględnieniem niepewności pomiarów.
2. Wykreślić zależność kwadratu modułu impedancji Z^2 od kwadratu częstości kątowej ω^2 lub kwadratu okresu T^2 wraz z prostą regresji liniowej.
3. Wykreślić zależność tangensa różnicy faz od częstości kątowej lub okresu wraz z prostą regresji liniowej.
4. Przedstawić wyniki końcowe w postaci wartości parametrów R i L lub C wraz z oceną niepewności, wynikami obliczeń pośrednich i dyskusją wyników.